Goldbach - A conjectura que virou corolário

Damer Tufaile

Engenheiro Civil pela Escola de Engenharia da Universidade Mackenzie

Resumo

A partir de uma função hiperbólica na qual se introduz nova variável e duas manipulações, uma algébrica e outra dimensional, obtém-se uma função circular que associada ao **princípio da indução finita**, se prova um importante teorema da **Teoria dos Números: "o da soma de dois números pares ou impares"** do qual a conhecida **conjectura de Goldbach** é um **corolário**.

Introdução

A conjectura citada no resumo foi formulada originalmente por **Christian Goldbach,** matemático prussiano e enviada a **Leonhard Euler,** extraordinário matemático suíço que viveu no século XVIII e legou aos pósteros uma vasta produção de trabalhos científicos.

No site **Seara da Ciência** {1) na seção "**Alguns problemas famosos**" há um interessante informe sobre a conjectura de Goldbach:
Na conjectura original Goldbach supôs que "*todo número inteiro maior que 5 pode ser escrito como a soma de três números primos*. Euler devolveu a conjectura fazendo uma modificação: "*Todo inteiro positivo par maior ou igual a quatro pode ser escrito como a soma de dois números primos* o que passou a ser conhecida como a conjectura de Goldbach.
Numerosos testes já foram realizados com valores relativamente elevados que confirmam a veracidade da conjectura, porém, não existe ainda uma demonstração cabal e convincente. Houve até prêmio oferecido para quem a demonstrasse e como até hoje ninguém conseguiu fazê-la, o prêmio foi cancelado.

Várias tentativas de demonstração da conjectura já foram feitas cujas análises revelaram-se não, ou parcialmente, verdadeiras (2) (3).
Mais recentemente, em 2012 e 2013, o matemático peruano Harald Helfgott publicou dois trabalhos alegando ter comprovado incondicionalmente a conjectura **fraca** de Goldbach (3).
Conforme descrito na Wickpédia, a conjectura **fraca** cujo enunciado é: "*Todo número ímpar maior que 7 pode ser expresso como a soma de três números primos ímpare*s ou de forma equivalente: "*Todo número ímpar maior que 5 pode ser expresso como soma de três números primos*" dos quais é possível usar primos idênticos mais de uma vez nessa adição.
Esta conjectura tem o nome de **"fraca"** em virtude da conjectura **forte** de Goldbach, sobre a soma de dois números primos, caso comprovada, provaria de forma automática a conjectura fraca de Goldbach tendo em vista que se cada número par maior que 4 é a soma de dois primos ímpares, pode-se adicionar 3

aos números pares maiores que 4 para produzir os números ímpares maiores que 7.
O ilustre matemático lusitano **Emanuel Bettencourt,** autor de notáveis textos sobre números primos, dirige na contra mão e em artigo postado em 06/02/2009 **(4)** referindo-se à conjectura de Goldbach observou: "***Conforme referi na minha introdução, estes "resultados" parecem de dar razão ao enunciado da Conjectura. Mas desenganem-se meus amigos. A Conjectura é falsa como teremos oportunidade de verificar. Não funciona a partir de números pares suficientemente grandes***". No entanto, até a presente data, Julho de 2016, desconhecemos se esta prometida verificação foi efetivamente apresentada.
Das considerações acima citadas conclui-se que a conjectura formulada por Goldbach, apesar de todas as tentativas feitas nos aproximadamente últimos 270 anos, ainda não foi cabalmente demonstrada.

1 Considerações preliminares

A conjectura de Goldbach guarda íntima relação com o tema "**decomposição de números inteiros"**. Antes de apresentarmos os elementos que propiciarão uma prova possível para a conjectura de Goldbach vamos tecer algumas considerações relacionadas com o **produto** de números inteiros e o **algoritmo hiperbólico**.

Além disso, como o tema até aqui, tem-se mostrado infenso ao longo dos anos, no que tange às demonstrações invariavelmente contestadas, sempre que oportuno, apesar de alongarmos um pouco mais esta exposição, não hesitaremos em esclarecer pontos que a nosso ver possam parecer obscuros ao leitor.

De modo geral, o produto de dois ou mais números inteiros pode ser representado por duas variáveis. Por exemplo, o produto dos seguintes números:

21*7*33*51 pode ser representado por 147*1683 onde 147 = 7*21 e 1683 =33*51

Da mesma forma, quando os números inteiros são primos estes também são passíveis de serem representados por duas variáveis.

Exemplos: 11*7*13*19 = 77*247 e 1*29 = 1*29

O produto de vários números inteiros pode ser traduzido matematicamente, em última instância, pelo produto C constante de duas variáveis x*z, onde C=x*z, dita **função hiperbólica**, que é a **expressão usada** para os cálculos do **algoritmo hiperbólico**, de modo que o problema possa ser resolvido por meio de tentativas e erros fazendo uma das variáveis z dependente e a outra x independente e utilizando para valores de x a série numérica 3, 7,9,11,13,17......$C^{1/2}$obtida da série do **algoritmo ingênuo** (série 1,2,3,4,5.....) de onde se eliminou o número 1 e os múltiplos de 2 e 5.

Uma vez obtidos os dois primeiros valores numéricos que solucionam o problema repetem-se para os dois valores encontrados novos testes de modo a verificar se eles são primos ou não e assim por diante até se obter a decomposição total de todos os números em seus fatores primos.

Deduz-se daí que a decomposição de um número inteiro pode apresentar um ou mais estágios. Num primeiro estágio, quando C é par ou terminado em 5 divide-se sucessivamente o número C por 2 ou 5 até obter-se um C_1 terminado em 1, 3, 7, ou 9. Num segundo estágio C_1 é testado por sua divisão sucessiva pela série numérica 3, 7, 9, 11 ....de onde resultará dois novos valores x_1 e z_1.

x_1 e z_1 por sua vez devem ser testados para se saber se são primos ou não fazendo $C_{x1} = x_1$ e $C_{z1} = z_1$. Este processo se estende indefinidamente até que todos os números inteiros obtidos sejam primos. Observar que quando C é um número primo haverá um único estágio de cálculo.

Lembretes importantes:

Um número inteiro é chamado de **primo** somente quando for divisível por 1 e por ele mesmo.

Testar a **primalidade** de um número inteiro significa comprovar se ele é um número primo.

Passamos agora a apresentar as três funções que servirão de apoio para a demonstração do teorema da soma de dois números pares ou impares. Identificamos uma função dita **hiperbólica** que através de manipulações algébricas e dimensional é passível, respectivamente, de ser transformada em primeiro lugar numa função **parabólica** e em segundo numa função **circular**.

2 Função hiperbólica

Se **z** e **x** são duas variáveis que representam dois números inteiros positivos e **C** o resultado do produto destes dois números, então podemos escrever que:

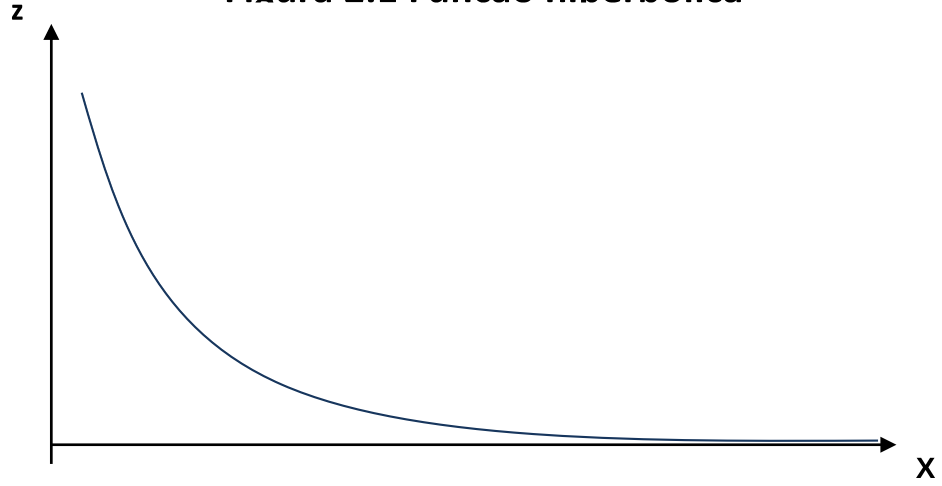
$x*z = C$ ou $z = C/x$ equação 2.1

Caso tivéssemos uma equação a mais, como por exemplo, a soma, a diferença ou mesmo a relação entre **x** e **z,** o problema de determinar as incógnitas poderia ser facilmente resolvido. No caso em questão temos uma única equação e a informação adicional de que **x** e **z** são números inteiros, o que permite que o problema possa ser resolvido por meio de tentativas e erros pela variação do valor de **x** na equação 2.1 até que seja encontrado z inteiro.

Variando **x** de 1 a $\mathbf{C^{1/2}}$ podemos construir um gráfico cartesiano semelhante ao indicado na figura 2.1. A curva obtida é um trecho do ramo positivo de uma **hipérbole** assíntota aos eixos **x** e **z**. Baseado nesta variação haverá um momento em que se obterá um dos números procurados ou não, caso **C** seja um número primo. A função hiperbólica serve como base de cálculo para o que se convencionou chamar de **algoritmo ingênuo** pelo qual se divide sucessivamente C pela série de números inteiros positivos, isto é, 1, 2, 3, 4, 5, 6... $C^{1/2}$.

Cabe ressaltar que quando x e z são primos o produto C resultante é único e a curva hiperbólica que representa a equação 2.1 tem somente dois valores que satisfazem a condição de inteiros para as variáveis x e z do problema.

Figura 2.1 Funcão hiperbólica



3 Função parabólica.

Corresponde à **primeira transformação**. Para tanto vamos considerar que a soma dos inteiros **x** e **z** seja igual a **D**.

Logo x+z =D donde z=D-x   equação 3.1   como z=C/x   então

D-x = C/x   ou ainda $C = Dx – x^2$ equação 3.2

Com esta operação a função original que era **hiperbólica** transformou-se em **parabólica**. Resolvendo a equação 3.2 que é do 2º grau em x vamos obter seus valores em função da variável D e da constante C. Neste caso com C constante variar-se-ia o valor de D até obter-se por tentativas um valor inteiro para x.

4 Função Circular

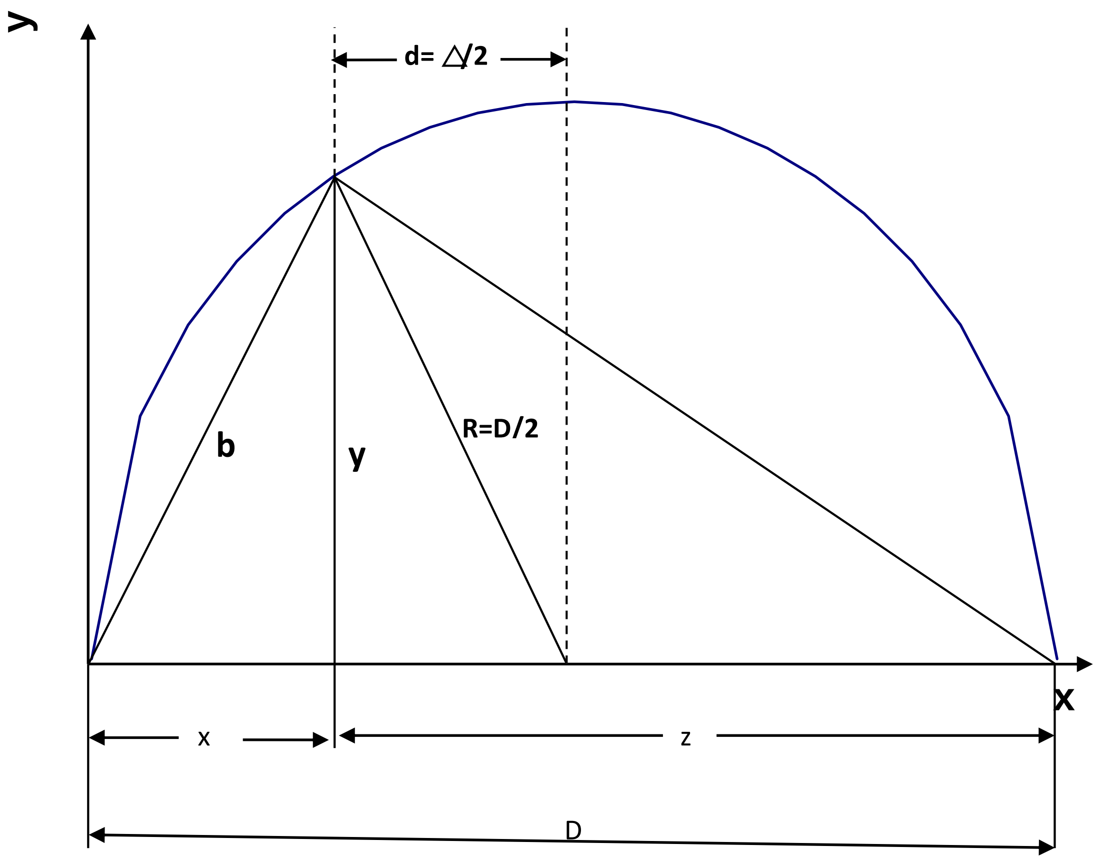
Corresponde à **segunda transformação** e para tanto vamos considerar o dimensional das grandezas apresentadas na equação 3.2.

Observe que o 2º membro desta equação tem o dimensional quadrático (pode ser interpretado, por exemplo, como o produto dos módulos de dois segmentos de reta enquanto que o 1º membro é unidimensional). Assim, se na equação 3.2 fizermos **$C=y^2$** ambos os membros da equação ficarão com o mesmo dimensional e então teremos, substituindo **C**, que:

$C = y^2 = x * (D-x)$.   equação 4.1

Nesta equação podemos interpretar ainda **x** e **(D-x)** como sendo os módulos de dois segmentos de reta adjacentes pertencentes a uma mesma reta de modo que a soma dos módulos dos dois segmentos seja igual ao diâmetro D do semicírculo, denominado **Circulante** (***Alusão ao semicírculo que aparece em artigo anterior produzido pelo autor deste trabalho intitulado "O Circulante na Grafostática" em 1967 ainda como acadêmico no curso de Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Mackenzie e publicado na revista Estrutura Nº 65 no ano de 1968***) conforme se mostra na figura 4.1. A equação 4.1 representa a equação da circunferência e de acordo com as relações métricas no círculo, o quadrado da ordenada y de um ponto x genérico da circunferência do semicírculo é dada pelo produto de x por (D-x) onde x e (D-x) representam os dois números inteiros procurados.

Figura 4.1 – Função Circular



5 Classes de Circulantes

De acordo com o valor numérico dos diâmetros um dado Circulante pode ser **par** ou **ímpar**.

Num Circulante de diâmetro par **D** as variáveis **x** e **z** alternam-se sucessivamente através da combinação de dois números ímpares e dois números pares.

Por exemplo, num Circulante de diâmetro D = 8 as variáveis x e z se combinam da seguinte forma: 1,7; 2,6; 3.5, 4,4: 5,3; 6;2; 7,1.

Num Circulante de diâmetro ímpar **D** as variáveis **x** e **z** se sucedem de modo que uma das variáveis ora é ímpar e a outra par (enquanto x for menor que D/2 e vice versa quando x for maior que D/2).

Por exemplo, num Circulante de diâmetro D = 9 as variáveis **x** e **z** se combinam da seguinte forma: 1,8; 2.7; 3.6; 4,5; 6.3; 7,2; 8,1.

Neste artigo concentramos nosso estudo em diâmetros **pares** isto porque quando o diâmetro for **impar sempre será possível** por eliminação de números **pares** e eventualmente de **múltiplos se 5** fazê-lo recair num diâmetro par. De fato, observe que produtos pertencentes a Circulantes com diâmetros ímpares, devido a combinação de x e z ser um número par com um número impar ou vice versa o produto C será sempre um número terminado em par. Se dividirmos C sucessivamente por 2 e eventualmente por 5, caso o número a ser decomposto o tenha em sua composição, ao final vamos obter um novo C terminado em 1, 3,7, ou 9 cujo diâmetro D a ser determinado **necessariamente** será um número **par**.

6 Unicidade e multiplicidade de C = Y^2

Um dado valor de **C** = $\mathbf{y^2}$ pode estar contido em um ou mais Circulantes conforme resultem de um número primo ou do produto de dois números primos ou ainda de vários números primos.

Vamos a um exemplo.

Consideremos um circulante de diâmetro D = 30 (qualquer par maior ou igual a 4 se analisa de forma idêntica) no qual ocorrem as seguintes combinações de pares inteiros:

1, 29; 2, 28; 3, 27; 4, 26......14, 16; 15, 15; 16, 14......28, 2; 29, 1 donde observa-se as seguintes combinações de pares de primos:

7, 23; 11, 19; 13, 17; 17, 13; 19, 11; 23, 7

O circulante com D = 30 é uma espécie de lugar geométrico dos produtos: C = y^2 : 7*23 = 161; 11*19 = 209; 13*17 = 221 juntamente com seus pares simétricos em relação à ordenada máxima y = 15. Por exemplo, o produto 7*23 = 161 é único e só está contido no Circulante com diâmetro D = 30 (**ver a demonstração** do teorema da unicidade do produto de dois números primos no item 8). Esses produtos de dois primos constituem uma família ou conjunto único de números que não se repetem para quaisquer outros diâmetros.

Neste exemplo, a propriedade da unicidade é válida somente para o conjunto de produtos de pares de primos cuja soma seja igual a D =30.

Ela já não é válida para o produto de **não primos**, como por exemplo: 14*16 = 224 (produto que pode não pertencer somente ao diâmetro D = 30) que fatorado dá $7*2^5$. Como é um número composto por inúmeros fatores há uma multiplicidade de diâmetros possíveis:

D = 14+16 = 30; D = 28 + 8 = 36; D = 56 + 4 = 60 e D = 112+ 2 = 114

7 Relações métricas no Círculo

Podemos explicitar **x** ou **z** para a função circular, isto é, resolvendo a equação 4.1 do segundo grau em **x** ou **z** obtemos:

$$x \text{ ou } z = [D \pm (D^2 - 4y^2)^{1/2})] /2 \qquad \text{equação 7.1}$$

Donde o delta **d** da fórmula de **Bashcara (*Matemático nascido em 1114, na Índia e viveu até meados de 1185*)** vale

$$d = (D^2 - 4y^2)^{1/2} \qquad \text{equação 7.2}$$

Prosseguindo, conforme indicado na figura 4,1, ainda de acordo com as relações métricas no círculo, podemos escrever que:

$$x*D = b^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{equação 7.3}$$

Dividindo os membros da equação 7.3 por **x**, obtemos:

$$D = b^2/x = x + y^2/x \qquad \text{equação 7.4}$$

A equação 7.1 **pode** ser utilizada como **algoritmo,** que denominamos **circular,** para determinação de x e z inteiros. Com efeito, dado o valor de $C=y^2= x*z$, onde Y^2 é uma constante resultante do produto de dois ou mais números inteiros, podemos calcular x e z por tentativas variando o valor do diâmetro D do Circulante. Nestas circunstâncias, a maior parte das raízes não será inteira e dependendo da composição do número, pode ser necessário **realizar dezenas de milhares de cálculos** para chegar-se à determinação das várias raízes inteiras porventura existentes de **x** e **z**. Isto não significa que a equação não deva ser aplicada no caso de se usar valores arbitrariamente escolhidos para D e y^2. Ela tem caráter geral e dependendo do valor do discriminante as raízes resultantes poderão ser inteiras positivas, inteiras ou irracionais positivas e complexas respectivamente quando o discriminante da fórmula de Bashkara for zero, positivo ou negativo. Ainda **é importante** ressaltar que quando $C=y^2$ for **o resultado do produto de dois ou mais números pares ou impares sempre haverá pelo menos uma solução inteira para x e z**. De fato, numa primeira instância quando o discriminante é nulo resultarão raízes inteiras onde x=z=D/2. Em segunda instância poderá haver um par de raízes inteiras caso y^2 seja o produto de 2 primos ou ainda vários pares de raízes inteiras quando y^2 for composto pelo produto de vários números inteiros pares, impares primos ou não. Para cada uma destas instâncias, uma vez encontrado um par de raízes, elas devem ser testadas quanto a primalidade até que os inteiros encontrados sejam todos primos. Finalmente, em última instância quando Y^2 corresponder a um número primo a decomposição será composta das raízes 1 e y^2, onde y^2 será **necessariamente** um número primo, cujo diâmetro do Circulante correspondente será D=$\mathbf{y^2}$+1. Portanto, que fique bem claro que **se $\mathbf{Y^2}$ for o resultado do produto de dois ou mais números inteiros sempre haverá pelo menos duas raízes inteiras a serem determinadas por tentativas variando-se o valor de D na equação 7.1.**

Cumpre ainda assinalar que há numerosos tipos de algoritmos que são utilizados para esta verificação. Eles se dividem em duas classes: os **determinísticos** e os **probabilísticos**. Os determinísticos são concebidos de tal forma a não ter dúvida quanto aos resultados encontrados. Já os probabilísticos por se basearem em probabilidades admitem alguma margem de erro nos resultados a serem obtidos.

Até o presente não se tem notícia da **existência** de algoritmos, que a guisa de passe de mágica, **teste** de forma **instantânea** ou **quase**, a primalidade de um número inteiro qualquer. Dependendo da formulação os algoritmos podem ser mais ou menos eficientes no que se refere diretamente à quantidade de cálculos e indiretamente ào tempo levado para obtenção dos resultados. Alguns exemplos de algoritmos: crivo de Eratóstenes, ingênuo, chinês, AKS.

8 Teorema da unicidade do produto C = Y^2 = x*z onde x e z são números primos

A demonstração deste teorema, que também pode ser provado através do teorema fundamental da aritmética, se baseia nas grandezas indicadas no Circulante da figura 4.1.

Seja C, o resultado do produto de dois números primos, igual ao quadrado da ordenada y correspondente à abscissa x do ponto genérico P de coordenadas x, y situado na circunferência do Circulante da figura 4.1 onde a soma de x (primo menor) e de D-x = z (primo maior) corresponde ao diâmetro D , então podemos afirmar que "**C = $\mathbf{Y^2}$, resultado do produto destes dois primos é único ".**

Prova:

Suponhamos a existência de outro par de primos x' e z', diferentes de x e z, tais que x'+ z' = D, de modo que:

Y^2 = x*z = x'*z' equação 8.1

Como por hipótese x é diferente de x' e z diferente de z' então as únicas igualdades que satisfazem a equação 8.1 são quando

$$x' = z \text{ e } z' = x$$

O que mostra que pode haver apenas uma troca de valores entre as duas incógnitas em função da simetria do Circulante em relação à ordenada máxima (os valores obtidos são complementares e correspondem ás coordenadas x', y de um ponto P' do Circulante simétrico ao ponto P de coordenadas as (x, y). Observar que esta unicidade não vale para pares de números que não sejam primos.

CQD

9 Algumas considerações úteis para a demonstração do Teorema da soma de dois números inteiros pares ou ímpares, primos ou não.

Visando a clareza de exposição, antes de entrarmos no mérito da demonstração deste teorema, façamos algumas considerações úteis não só para seu bom entendimento como também evitar eventuais questionamentos indevidos. Vimos na introdução deste artigo que a conjectura proposta por Goldbach foi devolvida por Euler com o seguinte enunciado: "*Todo inteiro positivo par maior ou igual a quatro pode ser escrito como a soma de dois números primos" e* assim permaneceu até os dias de hoje.

Para formular a conjectura provavelmente a dupla Goldbach & Euler fizeram uma série de cálculos e intuíram sua provável veracidade, porém, sem **deduzir** ou **provar** que o enunciado proposto seria uma **condição necessária**. Passaram-se dezenas de décadas e esta conjectura revelou-se improvável (no sentido de não conseguir-se prova-la) apesar de todas as evidências de ser verdadeira. Pesquisadores com a ajuda de computadores testaram sua veracidade para valores relativamente elevados sem que nenhum dos testes a tenha negado, porém, perdura até o presente a **crença** de que poderia haver números pares suficientemente grandes que não satisfariam a condição prevista na conjectura.

O que é um número suficientemente grande 10^{10}, 10^{1000}, $10^{100000000}$ ou um número beirando o infinito? Como surgiu esta crença? Supomos que quem a formulou não deveria ter uma ideia clara do seu significado ou caso tivesse esqueceu-se de expressá-la, , pois, até o presente ao que se sabe, não existe consenso sobre isto.

Este tipo de prova, por maiores que sejam os números testados, caso estes não contrariem a conjectura, sempre haverá uma infinidade de números superiores a ele que poderiam ser testados indefinidamente.

Nestas circunstâncias, achar um número que não satisfaça a conjectura, parece-nos ser tarefa digna de **Sísifo** (***Tarefa de Sísifo: expressão popular oriunda da mitologia grega, cujo significado diz respeito a qualquer tipo de trabalho ou situação que é interminável e inútil***). Julgamos que o caminho para a demonstração da conjectura dificilmente poderia ser por está via.

Presume-se ser intuitivo que um número par qualquer diferente de dois pode ser equivalente à soma de dois números pares ou ímpares. Ninguém em sã consciência pediria uma prova de sua veracidade ainda que fosse fácil prová-la. Como os números primos pertencem ao conjunto dos números ímpares e constituem uma classe à parte no que se refere à divisibilidade surge a dúvida: será que existe algum número par que não corresponda a soma de dois números primos? É de se observar que à priori, a operação de adição não discrimina ou não pergunta se os números a serem somados são primos ou ímpares. Ela simplesmente ignora se os números somados são primos ou não.

Então, no que se baseia esta crença? É gratuita ou tem algum fundamento? Aparentemente ela se lastreia nas **variações bruscas do** número de pares de primos contidos em cada número par e na **esperança** de encontrar números pares gigantes para os quais esta variação seria de tal monta que a quantidade de pares de primos desses números caísse bruscamente para zero. Veja na tabela 9.2 como funciona esta variação para diâmetros até D=254.

Porem, as evidências apontam para o contrário, senão vejamos:

Na tabela 9.1 montamos uma matriz constituída, tanto nas linhas como nas colunas pelo número 1 e a sequência de primos 3, 5, 7, 11, 13..... 109, 113, 127 (a introdução do número 1, apesar de não ser primo, é necessária para que se possa visualizar, quando ocorrer, a combinação de números primos com a unidade enquanto que a exclusão do primo 2 sé justifica por produzir, quando somado com primos impares, diâmetros impares). Nos cruzamentos das linhas e colunas indicamos as somas ou os diâmetros correspondentes. Por exemplo, no cruzamento da coluna correspondente ao número 13 e a linha correspondente ao número 31 colocamos a soma D=44. Como a matriz é simétrica em relação à diagonal principal, dispomos, para maior clareza, somente os diâmetros que estão mais próximos à ela.

Observe que os diâmetros correspondentes ao dobro de um dado primo se localizam nesta diagonal e que os mesmos formam uma espécie de **eixo diretriz** em torno do qual se agrupa uma nuvem de diâmetros intermediários resultantes das somas de primos diferentes. Quando os primos são gêmeos (primos cuja diferença é igual a 2) como é o caso dos primos 5 e 7, então o diâmetro 12 (assinalado em itálico) aparece encostado na diagonal principal entre os diâmetros 10 e 14. A medida que a diferença entre primos aumenta o número de pares intermediários também aumenta proporcionalmente a esta diferença. Por exemplo, junto aos diâmetros 62 e 74 estão agrupadas as combinações intermediárias mais próximas desses diâmetros: 64, 66, 68, 70 e72 que correspondem respectivamente à soma de 23,41; 29,37; 31,37; 29,41; 31, 41.

Apesar de termos feito esta análise até o diâmetro 254 o conteúdo da tabela 9.1, por si só, constitui uma **evidência** ou **indício** de que este comportamento provavelmente deva estender-se indefinidamente uma vez que a quantidade de primos é infinita, e assim confirmar que a conjectura é correta. Nos números apresentados na tabela 9.2, em que pese a falta de **regularidade**, observa-se, à medida que os valores dos diâmetros ou somas crescem, que a tendência do número de soma de pares de primos, também é de crescimento o que de certa forma corrobora a crença da veracidade da conjectura. Salvo melhor juízo, baseando-se nas evidências apresentadas nas tabelas 9.1 e 9.2 há de se concluir que é muito mais razoável crer que a conjectura seja verdadeira do que negá-la. Se as **quedas bruscas** anteriormente alegadas tivessem que acontecer seria mais razoável imaginá-las a ocorrer entre números pares pequenos o que de fato não aconteceu. Aliás, a única exceção verificada até o momento é o número 2 que é exatamente o menor par, mas que está excluído do enunciado da conjectura.

TABELA 9.1

	1	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127
1	2	4																													
3	4	6	8																												
5		8	10	12																											
7			12	14																											
11			16	18	22																										
13				20	24	26																									
17					28	30	34																								
19						32	36	38																							
23						.	40	42	46																						
29						.		48	52	58																					
31						44		50	54	60	62																				
37								56	.	66	68	74																			
41									64	70	72	78	82																		
43												80	84	86																	
47										76	.	.	88	90	94																
53											.	.	.	96	100	106															
59											.	.	.	102		112	118														
61											92	98	.	104	108	114	120	122													
67														110	;	.	126	128	134												
71														.		124	130	132	138	142											
73														116		.	.	.	140	144	146										
79																.	.	.	.	150	152	158									
83																136	.	.	.	154	156	162	166								
89																	148	.	.	.	.	.	172	178							
97																			164	,	.	.	180	186	194						
101																	160	.	.	.	174	180	184	190	198	202					
103																			170	.	.	182	.	192	200	204	206				
107																		168	.			.		196	.	208	210	214			
109																			176			188		198			212	216	218		
113																												220	222	226	
127																									224	.	.	.	236	240	254
131																									228	232	234	238	.	244	
137																									.		.		246	250	
139																									.		242		248	252	
149																									.						
151																						230	.	.	.						

D	QP	D	QP	D	QP	D	QP	D	QP	D	QP	D	QP	D	QP	D	QP	D	QP
2	0	28	2	54	5	80	4	106	6	132	9	158	4	184	8	210	19	236	9
4	1	30	3	56	3	82	5	108	7	134	6	160	8	186	13	212	6	238	8
6	1	32	2	58	4	84	8	110	6	136	5	162	10	188	5	214	9	240	18
8	1	34	4	60	6	86	5	112	6	138	8	164	5	190	8	216	13	242	8
10	2	36	3	62	3	88	4	114	10	140	7	166	5	192	11	218	7	244	9
12	1	38	2	64	5	90	9	116	6	142	8	168	13	194	7	220	9	246	15
14	2	40	3	66	6	92	4	118	6	144	11	170	9	196	9	222	11	248	6
16	2	42	4	68	2	94	5	120	12	146	6	172	6	198	13	224	7	250	8
18	2	44	3	70	5	96	7	122	4	148	5	174	11	200	8	226	6	252	16
20	2	46	4	72	6	98	3	124	5	150	11	176	7	202	9	228	12	254	9
22	3	48	5	74	5	100	6	126	10	152	4	178	7	204	14	230	9		
24	3	50	4	76	5	102	8	128	3	154	9	180	14	206	7	232	7		
26	3	52	3	78	6	104	5	130	7	156	11	182	6	208	7	234	15		

TABELA 9.2

Convenções

D = Diãmetro do Circulante

QP - Quantidade de pares de primos cuja soma é igual a D

No entanto, argumentariam os céticos: ora, ora as aparências muitas vezes nos enganam e em se tratando de prova matemática, evidências e indícios não contam. É preciso estabelecer prova que seja clara e insofismável.

Sendo assim, para resolver esta questão fica claro que:

.É necessário provar que a conjectura **intuída** pela dupla Goldbach & Euler, além de condição **necessária**, também é preciso que seja **suficientemente** válida para **qualquer** número maior ou igual a quatro não importando seu **tamanho**.

. Para que não paire qualquer tipo de dúvida a prova, de preferência, deve ser demonstrada, **literalmente** falando, pela via **algébrica**.

Há anos que nosso objetivo sempre foi o de pesquisar e criar algoritmos para testar a primalidade de números inteiros. No curso dessas investigações viemos tomar conhecimento da conjectura de Goldbach somente em 2011. Jamais tivemos a pretensão de prová-la apesar de não duvidar de sua veracidade. Mais recentemente observando o discriminante da equação 7.1 intuímos que ali havia alguma coisa relacionada com a conjectura de Goldbach:

$$d = (D^2-4y^2)^{1/2} \qquad \text{equação 7.2}$$

O que fazia ali aquele 4 espremido entre o quadrado da soma de dois números inteiros e o produto y^2 desses mesmos números? Haveria alguma relação entre o 4 do discriminante da fórmula de Bashkara com a necessidade do número par D qualquer ser maior ou igual a 4? Foi neste momento que a ficha caiu. De fato, como veremos a seguir, a ciência para provar a condição **necessária** da conjectura de Goldbach está em explorar o conteúdo do discriminante da fórmula de Bashkara e como decorrência disto provar com o auxílio das **relações métricas no círculo** e da **indução matemática** que ela também é **suficiente**.

10 Teorema da soma de dois números inteiros pares ou ímpares

Enunciado: A condição necessária e suficiente para que um número inteiro D par qualquer maior ou igual a 4 seja igual à soma de dois números inteiros x e z pares ou impares, primos ou não, é que o quadrado da semissoma destes números seja maior ou igual que o seu próprio produto.

Em termos literais: $[(x+z)/2]^2 \geq x*z$

A condição é necessária

Prova:

Recorrendo ao Circulante da figura 4.1, x e z são dois números inteiros, pares ou impares primos ou não, cuja soma é igual ao diâmetro D, por hipótese par.

De acordo com a equação 7.1 tem-se que x ou z = $[D \pm (D^2 - 4y^2)^{1/2})] /2$

Para que as raízes x ou z sejam **reais** é **necessário** que o discriminante da equação acima seja maior ou igual a zero.

Observe que essa **exigência** não significa que a soma D resultado da soma das raízes reais inteiras tenham que se enquadrar totalmente no enunciado do teorema. Podem ocorrer valores de D que apesar de inteiros e reais não satisfaçam ao teor do enunciado. Após a demonstração da condição necessária do teorema é **preciso** verificar se há a **ocorrência** de valores de D que possam constituir **exceções**.

Tomando, portanto, a expressão do determinante dada pela equação 7.2, temos:

$[(D^2 - 4y^2)^{1/2}] \geq 0$ então $D^2 - 4y^2 \geq 0$ equação/ inequação 10.1

Ou $D^2 \geq 4y^2$ equação/inequação 10.2

Ou ainda $D/2 \geq y$ equação/inequação 10.3

Como D=x+z $y = C^{1/2}$ e C=x*z se os substituímos na equação/inequação 10.3

teremos $(x+z)/2 \geq (x*z)^{1/2}$ equação/inequação 10.4

Finalmente elevando ao quadrado ambos os membros da equação/inequação 10.4 teremos:

$[(x+z)/2]^2 \geq x*z$ equação/inequação 10.5

que traduz matematicamente, a **condição necessária,** para que um número inteiro D par qualquer maior ou igual a 4 seja igual à soma de dois números pares ou impares, primos ou não, **é que o quadrado da semissoma destes números seja maior ou igual ao seu próprio produto**.

Observe que a equação/inequação 10.4 exprime uma condição necessária equivalente. Com efeito, o raio do Circulante R vale D/2. Se ali fizermos a substituição de D/2 por R teremos:

$R \geq y$ ou $R \geq (x*z)^{1/2}$ inequação/equação 10.6

Isto é, uma variante, entre outras, para o enunciado do teorema seria: a condição **necessária** para que um número inteiro D par qualquer maior ou igual a 4 seja igual à soma de dois números pares ou impares, primos ou não, **é que o raio do Circulante seja maior ou igual à raiz quadrada do produto destes mesmos números.**

Vejamos agora porque o enunciado **exige** que o número par D qualquer seja maior ou igual a 4.

A resposta está indicada na tabela 10 abaixo.

Com base na equação/inequação 10.6 podemos determinar os valores inteiros mínimos de y que satisfazem a **condição necessária.**

Quando D=2 a única combinação possível de inteiros é x=1 e z=1. Apesar das raízes serem reais, como 1 não é primo nem par, esta combinação constitui a **única** exceção imposta pelo enunciado (D deve ser maior ou igual a 4).

Quando D=4 há duas combinações possíveis de inteiros para x e z: x=1; z=3 e x=2 e z=2.

o que enquadra na condição geral do enunciado, pois a 1ª combinação é a soma de dois inteiros impares e a 2ª combinação é a soma de dois inteiros pares que também são primos.

Quando D=6 há 3 combinações possíveis de inteiros: x=1, z=5; x=2, z=4; x=3, z=3 , onde a 1ª combinação é a soma de dois inteiros impares, a 2ª a soma se dois inteiros pares e a 3ª a soma de dois inteiros primos ou impares o que também se enquadra na condição geral do enunciado.

Diâmetro do Circulante	Valor Mínimo de Y	Incidência de pares de primos
2	1	0
4	2	1
6	3	1
8	4	1
10	5	2
12	6	1
14	7	2
16	8	2
18	9	2
20	10	2

Tabela 10

Prosseguindo nesta variação observa-se sempre a incidência de dois números pares alternando-se com dois números impares. Na tabela 10 mostramos a incidência de pares de primos para cada diâmetro até D=20 e onde é possível verificar que a partir de D=4 , apesar de irregular a quantidade, há sempre pares de primos presentes. Verifica-se também para valores crescentes de D (vide tabela 9.2), apesar da não regularidade, que as quantidades de pares de primos também tendem a ser crescentes. Uma possível explicação para isto é o fato de não existir uma fórmula ou função que generalize e determine o módulo e a posição ou ordem de um número primo qualquer.

Como **aplicação**, observar que quando se usa a equação 7.1 como algoritmo a equação/inequação 10.6 pode ser utilizada para o cálculo do diâmetro D mínimo a partir do qual, por tentativas, variando o valor de D iremos obter valores inteiros para as raízes x e z.

Vamos a um exemplo prático: tomemos o número par 108 (qualquer par maior ou igual a 4 se analisa de forma idêntica). Neste caso o Circulante tem diâmetro D=108 e a combinação dos pares de números seguem a seguinte sucessão:

1,107; 2,106; 3,105; ....; 52,56; 53,55; 54,54; 55,53; 56.52;........105,3; 106,2; 107,1

Com os produtos de cada um dos pares variando sucessivamente de 107; 212; 315;..........2912; 2915; 2916; 2915; 2912; 315; 212;107

Então o valor do produto C parte de um mínimo valendo 107 e chega a um máximo igual a 2916 para em seguida decrescer e recuar, de forma simétrica em relação à ordenada máxima, até ao menor produto igual novamente a 107.

Nenhum destes produtos é maior que 2916 correspondente a 54*54 onde 2916 é o quadrado do raio R do Circulante de diâmetro D e obedecem perfeitamente ao enunciado do teorema da soma de dois números inteiros.

A **condição é suficiente**

Com relação à demonstração da condição **necessária** vista acima se poderia argumentar que a condição deduzida é **necessária**, porém, não **suficiente**. Sendo assim, vejamos como demonstrar também esta **suficiência** combinando para tanto a equação/inequação 8.2 com o **princípio da indução finita** também conhecido como **indução matemática.**

Caso o leitor não esteja familiarizado com **indução matemática** sugerimos a leitura do artigo de mesmo nome existente na Wikipedia (**5**) onde para demonstrar a **condição suficiente** utilizamos a generalização que no caso é chamada de "**comece com b**".

Este tipo de demonstração pode ser utilizado de vários modos. Vamos exemplificar. Se pretendermos provar uma proposição, não para todos os números naturas, porém apenas para todos os números maiores que um determinado número **b**, então basta seguir os 2 passos abaixo:

1 Provar que a proposição é válida quando n=b (**base da prova**)

2 Provar que se a proposição é válida para n=k ≥ b então a mesma proposição também é válida para n=k+1.

Prova:

1º passo: base da prova (mostrar que o enunciado vale quando D=4)

O primeiro valor de D que satisfaz a condição necessária do enunciado é o par 4. Com efeito, já vimos que quando D_4=4 há duas combinações possíveis: :x=1, z=3 e x=2, z=2 (combinações dos ímpares 1 e 3, dos pares 2 e 2 e primos 2 e 2) o que constitui a chamada **base da prova**.

2º passo: Mostrar que se o enunciado vale para $D_k \geq D_4$ então o mesmo enunciado também vale para $D_{(k+2)}$ onde D_k é um diâmetro par qualquer de ordem k.

Em qualquer uma das equações/inequações 10.1 a 10,6 está implícita a **condição necessária** para que x e z sejam reais. Para a prova vamos utilizar a equação/inequação 10.1

:

$D^2 \geq 4y^2$ equação/inequação 10.1

Substituindo nesta equação/inequação y^2 por x(D-x) , dado pela equação 4,1, obtemos

$D^2 \geq 4(Dx - x^2)$ equação/inequação 10.7

Ao variarmos D, tem-se que os dois membros da equação /inequação 10.7 correspondem à seguinte sucessão:

$(D_4)^2 \geq 4x(D_4 - x)$

$(D_6)^2 \geq 4x(D_6 - x)$

....

....

$[D_{(k-2)}]^2 \geq 4(x-1)(D_{(k-2)} - x + 1)$ equação / inequação 10,8

$(D_k)^2 \geq 4x(D_k - x)$ equação / inequação 10.9

Onde $\mathbf{D_k}$ corresponde à soma de dois números inteiro pares ou impares primos ou não ou um diâmetro do Circulante **de ordem k** qualquer **par** e $D(_{k-2}) = D_k - 2$.

Observe que o 1º membro (Diâmetro **D**) varia de 2 em 2 enquanto que **x** no segundo membro varia de 1 em 1.

.Supondo agora que a equação /inequação 10,8 **seja verdadeira** precisamos **provar** que a equação / inequação 10.9 **também é verdadeira** e pode ser obtida por **manipulação algébrica** da equação/inequação 10.8.

Vejamos como isto é possível:

Partimos de

$[D_{(k-2)}]^2 \geq 4(x-1)(D_{(k-2)} - x + 1)$ equação/inequação 10.8

Substituindo $D_{(k-2)} = D_k - 2$ na equação / inequação 10.8 tem-se que:

$(D_k - 2)^2 \geq 4[x-1)(D_k - 2 - x + 1)]$

Que desenvolvida:

$(D_k)^2 - 4D_k + 4 \geq 4xD_k - 8x - 4x^2 + 4x - 4xD_k + 8 + 4x - 4$

$(D_k)^2 \geq - 4 + 4D_k + 4xD_k - 8x - 4x^2 + 4x - 4D_k + 8 + 4x - 4$

E simplificada transforma-se em:

$(D_k)^2 \geq 4xD_k - 4x^2$

De modo que enfim tem-se que: $(D_k)^2 \geq 4x(D_k - x)$ equação/inequação 10.9

CQD

Em matemática o termo **corolário** significa: consequência direta de uma proposição já demonstrada donde se conclui que a conjectura de Goldbach, objeto de demonstração deste artigo é um **corolário** do teorema da soma de dois números inteiros pares ou impares primos ou não, conforme enunciado dado no caput deste item.

Observe, conforme evidências e indícios apontados no item 9, a inutilidade de se tentar provar a não validade da conjectura utilizando grandes números. Conclui-se daí que também é inútil levantar argumentos do tipo: "Ah, na demonstração feita não foi provado que a conjectura vale para grandes números" . A conjectura foi aqui demonstrada para **qualquer** número par maior ou igual a 4 provavelmente da única forma possível que é a **literal**. Parece-nos também que a única forma de contestar a presente demonstração seria argumentar que o princípio da indução finita não seria nela aplicável. Como todos os cânones do princípio foram aplicados e atendidos integralmente na demonstração, negá-la corresponderia a negar o **princípio da indução finita**. Portanto, aos céticos, porventura ainda existentes, caberia o ônus da prova em contrário.

12 Desdobramentos do presente artigo

No decurso desta exposição fizemos referência a dois algoritmos básicos: o **hiperbólico** e o **circular**. O primeiro, variante do **algoritmo ingênuo,** tem a fama de tornar-se lento nas verificações de cálculo á medida que o valor do número a ser testado, em termos de primalidade, cresce em número de dígitos. Um dos motivos para a ocorrência desta lentidão diz respeito à existência dos chamados **falsos primos** (números compostos pelo produto de dois ou mais números primos) os quais participam de forma substancial na quantidade de cálculo exigida nas verificações.

Bettencourt em artigo sobre a conjectura de Goldbach **(6)** apresenta uma matriz singela, porem, engenhosa e genial onde se pode constatar a possibilidade de eliminação dos falsos primos múltiplos de 3. Abaixo indicamos a matriz que propicia esta eliminação. Na primeira coluna dispõe-se os 6 primeiros números naturais: na segunda coluna dispõe-se os naturais de 7 a 12; na terceira coluna os naturais de 13 a 18 e assim por diante *ad infinitum*. Observe que primos e falsos primos se localizam na 1ª e 5ª linhas; que falsos primos múltiplos de 2 se localizam nas 2ª, 4ª e 6ª linhas e na 3ª linha se localizam o 3 e todos seus múltiplos ou falsos primos dele oriundos.

1 7 13 19 25 31 37 43 ....

2 8 14 20 26 32 38 44.....

3 9 15 21 27 33 39 45.....

4 10 16 22 28 34 40......

5 11 17 23 29 35 46.........

6 12 18 24 30 36........

Matriz de Bettencourt

Excluindo o número 1 da 1ª linha os demais elementos podem ser obtidos pela conhecida expressão $n=6k+1$ com variação para k seguindo a ordem dos números naturais 1, 2, 3.... Já os elementos da 5ª linha podem ser obtidos pela expressão semelhante $n=6k-1$ com k também variando naturalmente.

Com este artifício Bettencourt mostrou que é possível eliminar cerca de 33,3% dos cálculos quando comparados com a utilização da série numérica 3, 7, 9, 11, 13...normalmente usada nos cálculos do algoritmo hiperbólico.

\Observe ainda que nas 1ª e 5ª linhas os números primos e falsos primos encontram-se intercalados aparentemente de forma aleatória e não existe uma forma, a não ser por teste de primalidade, de diferenciar se um dado número é primo ou falso primo.

Por isto, surge a pergunta inevitável: Se foi possível eliminar com o auxílio da matriz de Bettencourt os múltiplos de 3 nos cálculos**, seria também possível eliminar, ainda que de forma parcial, os múltiplos de primos superiores a 3?**

Saber desta possibilidade torna-se **crucial** para o problema da decomposição de números inteiros pelo algoritmo hiperbólico uma vez que a **lentidão** nos cálculos, caso a resposta a esta questão seja positiva, poderia ser **drasticamente** reduzida.

Portanto, examinar este tema, é preciso!

No próximo artigo intitulado “ ***A ciência de eliminar falsos primos***” pretendemos abordar e esclarecer variados aspectos deste importante tema.

Bibliografia

(1) Seara da ciência
http://www.searadaciencia.ufc.br/especiais/matematica/problemasfamosos/matematica.htm

(2) Universidade federal de Campina Grande – Centro de ciências e tecnologia..
http://www.dme.ufcg.edu.br/pet/arquivos/Conjectura_de_Goldbath.pdf

(3) Conjectura fraca de Goldbach – Wikipédia, a enciclopédia ...
https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura_fraca_de_Goldbach

(4) Conjectura de Goldbach - O que são números primos ?
http://aconjecturadegoldbach.blogspot.com.br/2009/02/licao-n-1.html

(5) Indução Matemática Wickpedia
https://pt.wikipedia.org/wiki/Indu%C3%A7%C3%A3o_matem%C3%A1tica

(6) Conjectura de Goldbach – Como encontrar números primos.
http://aconjecturadegoldbach.blogspot.com.br/2009/02/licao-n-2.html